Bab 2 : Matriks

by : rraezzz

➢ Matriks ialah nombor-nombor yang disusun dalam baris dan lajur untuk membentuk satu tatasusun segi empat tepat atau segi empat sama

Penyelesaian:

(a) baris 1 → $[1700 \quad 2100 \quad 2000 \quad 1800]$ atau $\begin{bmatrix} 1700 \\ 2100 \\ 2000 \\ 1800 \end{bmatrix}$ ← lajur 1

Ini matriks baris. Matriks baris mempunyai hanya satu baris.

Ini matriks lajur. Matriks lajur mempunyai hanya satu lajur.

(b) $\begin{matrix} \text{baris 1} \rightarrow \\ \text{baris 2} \rightarrow \\ \text{baris 3} \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 13 & 5 & 1 \\ 10 & 2 & 4 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 13 & 10 & 8 \\ 5 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

lajur 1 lajur 2 lajur 3

Ini matriks segi empat sama. Matriks segi empat sama mempunyai bilangan baris dan bilangan lajur yang sama.

(c) $\begin{matrix} \text{baris 1} \rightarrow \\ \text{baris 2} \rightarrow \\ \text{baris 3} \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 76 & 80 \\ 82 & 88 \\ 72 & 70 \end{bmatrix}$ atau $\begin{matrix} \text{baris 1} \rightarrow \\ \text{baris 2} \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 76 & 82 & 72 \\ 80 & 88 & 70 \end{bmatrix}$

lajur 1 lajur 2 lajur 3 (for the second matrix)

by : rraezzz

➢ Peringkat matriks boleh ditentukan dengan menulis bilangan baris dan bilangan lajur matriks itu

baris 1 → baris 2 →

$$\begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

↑ lajur 1 ↑ lajur 2 ↑ lajur 3

Matriks ini mempunyai 2 baris dan 3 lajur. Jadi, ini ialah matriks peringkat 2×3 dan dibaca sebagai "matriks 2 dengan 3".

Setiap nombor dalam matriks dikenali sebagai **unsur** matriks itu. Misalnya, unsur pada baris ke-2 dan lajur ke-3 bagi matriks $\begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$ ialah 4.

Huruf besar digunakan untuk mewakili suatu matriks, misalnya $A = \begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$, dan unsur pada baris ke-2 dan lajur ke-3 boleh diwakili dengan a_{23}, misalnya $a_{23} = 4$.

a_{ij}

baris ke-i ← → lajur ke-j

$$\text{maka, } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

by : rraezzz

➢ M sama dengan N dan hanya jika kedua-dua matriks mempunyai peringkat yang sama dan setiap unsur sepadannya sama

Tentukan sama ada setiap pasangan matriks berikut adalah sama. Berikan sebab anda.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $C = [3 \quad 9]$ dan $D = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$ dan $F = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $G = \begin{bmatrix} 0.5 & -2 \\ 6 & 0.8 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$ dan $H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 6 & \frac{4}{5} \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$

(a) $A = B$ kerana kedua-dua matriks mempunyai peringkat yang sama dan setiap unsur sepadannya sama.
(b) $C \neq D$ kerana kedua-dua matriks tidak mempunyai peringkat yang sama. Peringkat C ialah 1×2 manakala peringkat D ialah 2×1.
(c) $E \neq F$ kerana unsur sepadannya tidak sama.
(d) $G = H$ kerana kedua-dua matriks mempunyai peringkat yang sama dan setiap unsur sepadannya sama.

Diberi bahawa matriks $P = \begin{bmatrix} x & 7 \\ 0 & 5 - 3z \end{bmatrix}$ dan matriks $Q = \begin{bmatrix} 5 & y + 1 \\ 0 & 2z \end{bmatrix}$. Tentukan nilai x, nilai y dan nilai z jika $P = Q$.

Penyelesaian:

$P = Q$, maka semua unsur sepadan adalah sama.

$x = 5$, $7 = y + 1$, $5 - 3z = 2z$

$y = 7 - 1$ $5 = 5z$

$y = 6$ $z = 1$

by : rraezzz

- Penambahan dan penolakan matriks hanya boleh dilaksanakan pada matriks yang sama peringkat
- Unsur yang sepadan ditambah atau ditolak untuk mendapat satu matriks tunggal yang sama peringkat

Bagi matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix}.$$

Contoh 7

Diberi matriks $C = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 6 & -11 & 7 \end{bmatrix}$, matriks $D = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$, matriks $P = \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{6} & 6 \\ 7.4 & -13 & 5 \\ 1 & 9 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ dan matriks $Q = \begin{bmatrix} 18 & \frac{1}{3} & -7 \\ 2.5 & -8 & 3 \\ 12 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$. Hitung

(a) $C + D$ (b) $P - Q$

(a) $$C + D = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 6 & -11 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + 14 & -8 + (-2) & 4 + 1 \\ 6 + (-3) & -11 + 5 & 7 + 9 \end{bmatrix}$$ ← Menambah unsur yang sepadan

$$= \begin{bmatrix} 24 & -10 & 5 \\ 3 & -6 & 16 \end{bmatrix}$$

by : rraezzz

➢ **Pendaraban matriks dengan suatu nombor dikenali sebagai pendaraban skalar**

Diberi matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan n ialah suatu nombor.

Maka $nA = n\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} na & nb \\ nc & nd \end{bmatrix}$.

n dikenali sebagai skalar.

Diberi $D = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, hitung

(a) $3D$ (b) $-\frac{1}{2}D$

Penyelesaian:

(a) $3D = 3\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3(-5) & 3(4) \\ 3(2) & 3(1) \end{bmatrix}$ ← Darabkan semua unsur dengan 3

$= \begin{bmatrix} -15 & 12 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $-\frac{1}{2}D = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)(-5) & \left(-\frac{1}{2}\right)(4) \\ \left(-\frac{1}{2}\right)(2) & \left(-\frac{1}{2}\right)(1) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -2 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Diberi $P = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -3 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, hitung $3(P - Q)$.

Penyelesaian:

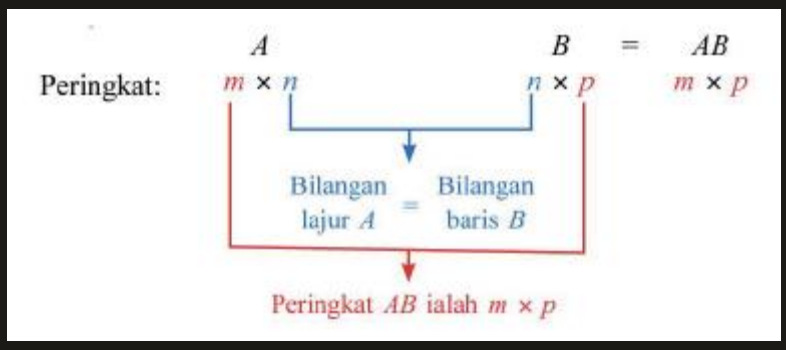
$3(P - Q) = 3\left(\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -3 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$ ← Buat penolakan dalam kurungan

$= 3\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ -4 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ ← Darabkan semua unsur dengan 3

$= \begin{bmatrix} 15 & 36 \\ -12 & 9 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$

by : rraezzz

- Mendarab dua matriks
- Jika matriks A mempunyai peringkat m x n dan matriks B mempunyai n x p, maka pendaraban AB boleh dilakukan dan peringkat AB ialah m x p



Diberi matriks $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan matriks $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Tentukan sama ada pendaraban CD dan DC boleh dilakukan atau tidak. Jika boleh, nyatakan peringkat hasil darab matriks itu.

Penyelesaian:

Peringkat matriks $C = 2 \times 1$, peringkat matriks $D = 2 \times 2$.

C D
2×1 2×2
Tidak sama

Pendaraban CD tidak boleh dilakukan kerana bilangan lajur matriks C tidak sama dengan bilangan baris matriks D.

D C
2×2 2×1
Sama
Peringkat DC

Pendaraban DC boleh dilakukan kerana bilangan lajur matriks D sama dengan bilangan baris matriks C.
Peringkat DC ialah 2×1.

by : rraezzz

➢ Matriks Identiti

Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dikenali sebagai matriks identiti dan diwakili oleh I.

Matriks identiti ialah matriks segi empat sama.
Matriks identiti, I, didarabkan dengan suatu matriks A, akan menghasilkan matriks A.

$$AI = IA = A$$

Tuliskan matriks identiti berdasarkan peringkat berikut.

(a) 1×1 (b) 2×2

(c) 4×4 (d) 5×5

Penyelesaian:

(a) $[1]$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

by : rraezzz

➢ Matriks Songsang

Bagi setiap matriks yang berikut, tentukan sama ada matriks songsang wujud. Jika wujud, hitung matriks songsang.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

(a) $ad - bc = 1(8) - 2(4)$
$= 8 - 8$
$= 0$

Tentukan kewujudan matriks songsang dengan penentu matriks, $ad - bc$

$|A| = 0$. Maka, A^{-1} tidak wujud.

(b) $ad - bc = 3(4) - 5(2)$
$= 12 - 10$
$= 2$
$\neq 0$

$|B| \neq 0$. Maka, B^{-1} wujud.

$B^{-1} = \frac{1}{3(4) - 5(2)} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Saling tukar kedudukan unsur dalam pepenjuru utama dan darabkan kedua-dua unsur lain dengan -1

Tentukan sama ada matriks berikut ialah matriks songsang bagi $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$. Jelaskan jawapan anda.

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}$

Hasil darab bukan matriks identiti

$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ bukan matriks songsang bagi $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ kerana hasil darab dua matriks ini bukan matriks identiti.

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hasil darab ialah matriks identiti

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hasil darab ialah matriks identiti

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ ialah matriks songsang bagi $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ kerana hasil darab dua matriks ini ialah matriks identiti.

by : rraezzz

➢ Kaedah Matriks untuk menyelesaikan persamaan linear serentak

Persamaan linear serentak

$ax + by = p$

$cx + dy = q$

Bentuk matriks $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

dengan keadaan a, b, c, d, p dan q ialah pemalar manakala x dan y ialah pemboleh ubah

$$AX = B$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Selesaikan persamaan linear serentak di bawah dengan menggunakan kaedah matriks.

$$x - 2y = 1$$
$$3x - 4y = 4$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$ ← Tulis persamaan linear serentak dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(1)(-4) - (-2)(3)}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Maka, $x = 2$ dan $y = \frac{1}{2}$ ← Jawapan akhir

by : rraezzz